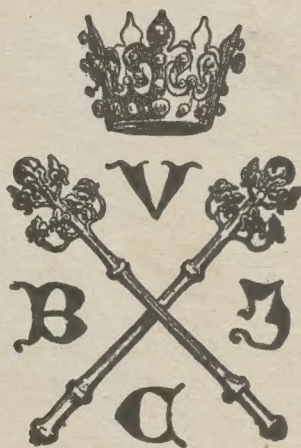




Мас. 31. Др.

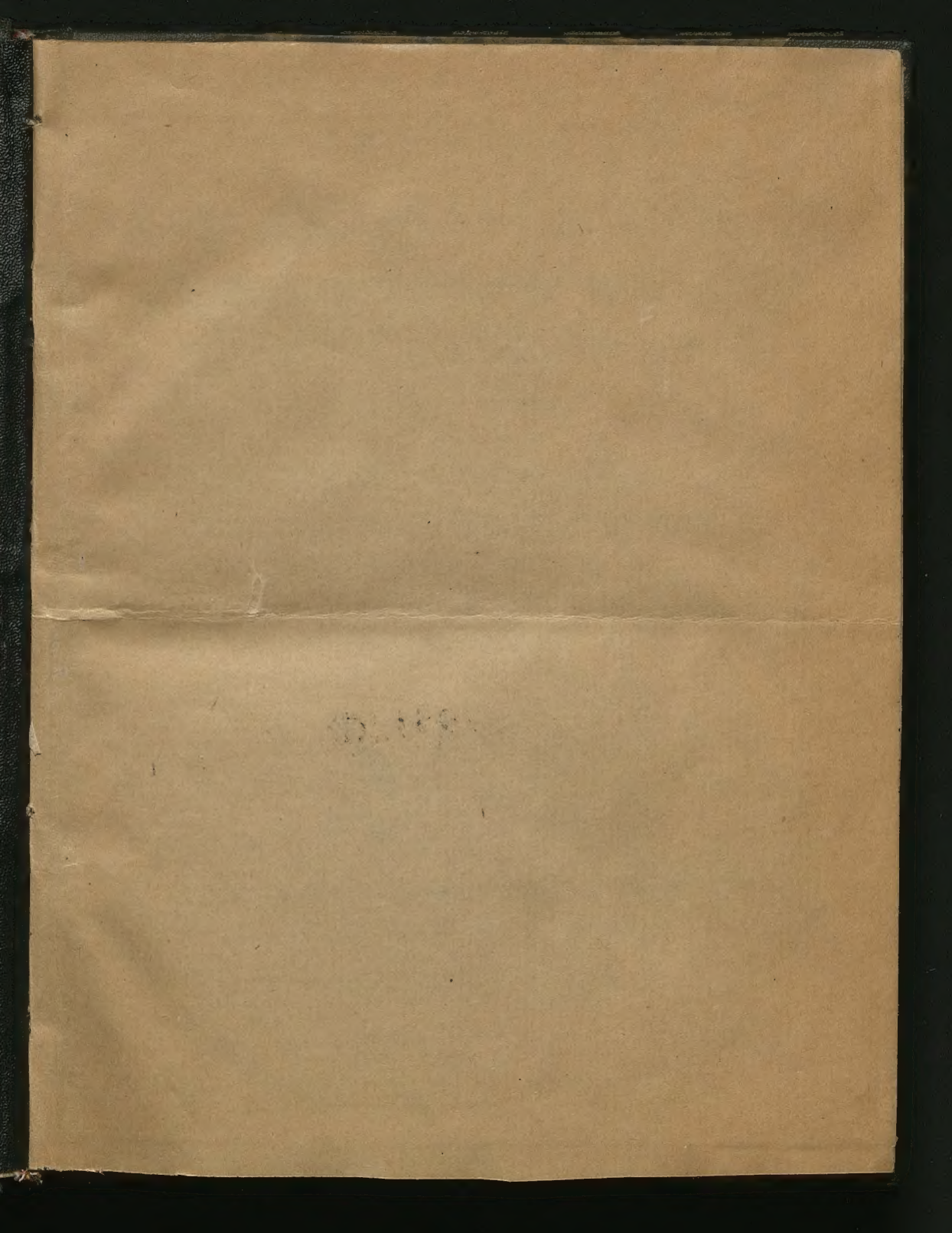
221960

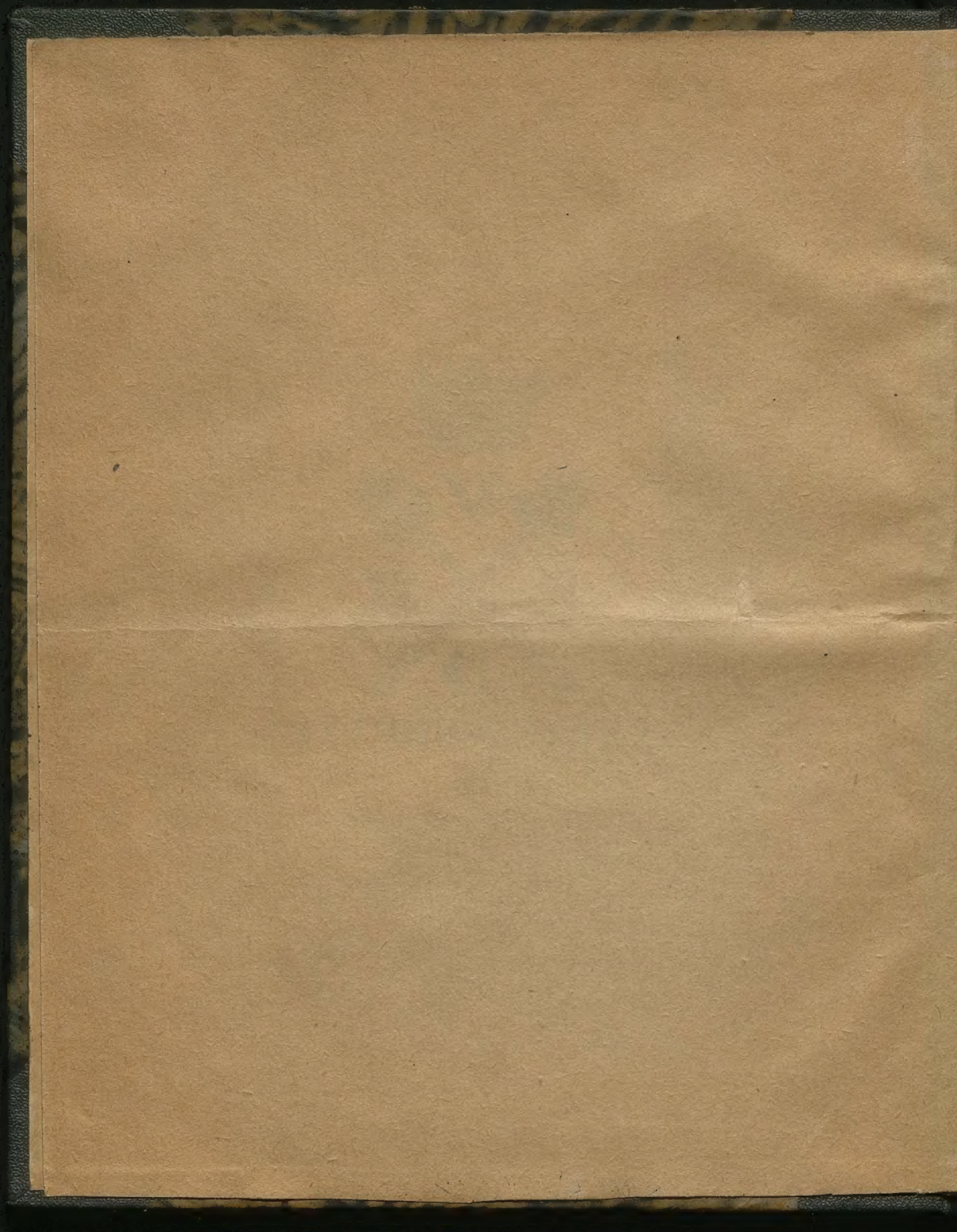
I 221982



221960-221982

I

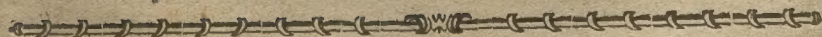




12

RATIO VERA
DIAMETRI AD PERIPHERIAM,
UT 8:25, VARIIS MODIS
A
VICE - COLONELLO EUGENIO CORSONICH
INVICTE DEMONSTRATA,
ET
JUDICIO ORBIS ERUDITI
SUBJECTA.

1219215



VARSAVIÆ, ANNO MDCCLXXXI.

Scholion §. 25ti prolongatum. Ad continuandas rationes hujus Scholii, assumantur pro Antecedentibus duo numeri unitate differentes e. gr. 45 & 46, & ad 3plum prioris addatur factor, qui ductus in 8 producat numerum paulò majorem Antecedente priore 45, nempe 6: nam $6 \times 8 = 48$; quo factore addito ad illius 3plum, oritur ratio excessiva 45 : 144; deinde ad 3plum Antecedentis posterioris addatur factor, qui ductus in 8 producat numerum aliquantò minorem Antecedente posteriore 46, nempe 5: nam $5 \times 8 = 40$; quo factore addito ad ejus 3plum, prodit ratio defectiva 46: 143. Pari modo reperiuntur rationes 47: 147 & 48: 149; 49: 154 & 50: 156; 51: 160 & 52: 162; 53: 166 & 54: 168; 55: 172 & 56: 174; 57: 179 & 58: 181; 59: 185 & 60: 187 & innumerae aliae, quarum excessivæ sunt semper paulò majores, & defectivæ paulò minores, quàm 1: 3½: id quod ita demonstratur: Sit Antecedens rationis excessivæ = a, & factor ad ejus 3plum 3 a addendus = n, erit fractio excedens triplum Antecedentis = $\frac{n}{a}$, qua reducta cum $\frac{1}{6}$ ad eandem denominationem, prodeunt æquivalentes $\frac{8n}{8a}$ & $\frac{n}{8a}$. Jam cum per hypobestimam 8n sit majus quàm a; palam est, etiam fractionem priorem esse majorem posteriore = $\frac{1}{8}$. Sit porro Antecedens rationis defectivæ = d (§. 15.) & factor ad ejus 3plum addendus = u: quoniam per hypobestimam 2dam 8 u est minus, quàm d; erit etiam fractio excedens 3plum Antecedentis minor, quàm $\frac{1}{8}$. Ergo. Per hujusmodi rationes autem tam calculi tedium, quàm partium varietas semper evitatur, quia factis faciendis, nunquam plures differentiæ, quàm 8 emergunt, inter quas unica duntaxat datur, quam denominator minor peripheriarum falsarum exactè metitur, & quæ per divisionem statim innotescit. Quare etiam summa x + y in plures partes quàm 2 resolvi nequit, quarum altera necessariò excessus, altera defectus esse debet (§. 22). Possunt etiam pro Antecedentibus assumi numeri, aliquot unitatibus, decadibus, vel centenariis inter se differentes, e. gr. 200 & 401, 300 & 507, dummodo notà dextimā alterutrius sit semper una ex his 1, 3, 7, 9. Quicumque igitur per par quodcunque rationum hac methodo inventarum operari dignabitur, cognoscet, si voluerit, indubitatè, rationem diametri ad periph. = 8: 25 ex legitimo argumentandi & universali computandi modo, non autem ex combinatione numerorum arbitraria, esse deductam. Ad ferendum judicium æquum, oportet in primis Problema quum sibi reddere familiare.

P R Æ F A T I O.

AB omni ævo, quo Geometria fuit excolta, Quadratura Circuli extitit nodus Herculanus, quem Mathematici celeberrimi solvere frustra sunt conati. Tantum autem abest, ut tot exemplis operæ perditæ ab eodem objecto investigando fuerim absterritus, ut potius (absit iactantia dicto) eo vehementiori flagrauerim desiderio materiam tam scabrosam seriò tractandi, veritatemque assequendi. Hoc intuitu varia composui scripta, quæ à nonnullis prædicatione fuere celebrata, ab aliis obscuritatis taxata, ab aliis tandem pro falsis habita, atque vituperata. Quamobrem consultum duxi, juris facere publici hocce Opusculum novum & postremum, in quo claritati, quàm maximè fieri potuit, studui, omnesque propositiones argumentis demonstrantibus adeò munivi, ut nullæ objectiones contra eas formari queant, quin illico corruant. Præmissis Definitionibus & Axiomate uno, posui pro basi demonstrationum mearum Problema unum simplicissimum quidem, sed verissimum, & nulli Paralogismo obnoxium: id quod ritè perpensa conditione ejus (§. 12. 13.), jure negari haud potest. Problemati imò legitimo ratiocinando modo superstruxi 2dum non minus solidum, & huic 3tium eadem proprietate præditum. Ope horum trium Problematum condidi octo Theoremata, de quorum veritate ed minus dubitare licet, quò firmiora sunt fundamenta, quibus innituntur: id quod imprimis ex Theorematibus 3tio & 4to fiet manifestum, per quæ semper & sine ulla exceptione peripheria diametri 8 prodit $= 25$, & lunula Circuli, cujus diameter 2, $= 1$. Arbitrabar quidem, Rationes Scholii §. 25ti esse suffecturas ad determinandam hanc peripheriam: nihilominus tamen rogatus à quodam Anonymo, ut traderem Methodum eas continuandi & resolutionem summæ excessus & defectus in plures quàm duas partes evitandi; eam ante hanc Præfationem demonstrativè exposui. Et quoniam resolutio dictæ summæ in partes, ex quibus fuit orta, sæpe conjuncta est cum difficultatibus permagnis, præsertim si numerator est confusus ex utroque denominatore multiplo peripheriarum falsarum; struxi, ad enucleandas eas, Problema 4tum, per quod excessus & defectus illico scientificè reperiuntur. Ex Problemate 5to & 6to innotescet modus componendi quadratum par cuivis Circulo dato, & describendi Circulum æqualem cuilibet quadrato dato. Denique ex Problemate 7mo perspicient etiam ii, qui magis experimentis, quàm rationibus convincuntur, diametrum ad peripheriam esse unicè ut 8:25. Jam ante biennium complevi annum Climactericum magnum; præterea Mathefin, quam in juventute mea proprio Marte ex Operibus immortalis Wolfii didici, cum successu hic docui: id quod ideo tantùm commemoro, ut inde judicari possit, me nihil ex levitate & sine sufficiente examine virium intellectus mei suscepisse. Sed id magis patebit ex ipso Opusculo, quod iudicio æquo Orbis eruditi subijcio, cujus benevolentia me demissè commendo: ex eo, inquam

quam luculenter elucebit, diametrum ad peripheriam esse, ut 8:25 (§. 17. 18. 24. 32. 34. 36. 38.); quadratum diametri ad Circulum ut 64:50 (§. 31.), consequenter ad Semicirculum ut 64:25; ad lunulam ut 4:1 (§. 28.); ad segmentum autem ut 64:9 (§. 33.); Et lunulam ad segmentum ut 16:9 (§. 37.); ex quo utique tuto concludi potest, tam semicirculos, quam segmenta esse numeros æquæ perfectè quadratos, ac sunt lunulæ. Jam cum tam in Methodo demonstrativa perfectè quadrandi circulum, quæ, ut ex Dissertatione adjecta patebit, non fuit ritè intellecta, quàm in omnibus aliis scriptis à me editis eadem contineantur veritates; palam est, nullum eorum potuisse refutari. Inter peripherias falsas $3\frac{1}{4}$ & $3\frac{3}{5}$ diametri 1 dantur quidem innumere fractiones intermediae, quarum aliæ sunt majores, aliæ minores, quàm $3\frac{1}{4} = 2\frac{5}{4}$: attamen nulla alia, ut ex n. 1 §. 18vi perspicuum est, constituit peripheriam veram, nisi $2\frac{5}{4}$. Longè plures fractiones reperiuntur inter peripherias falsas §. 24 & 25ti reductas ad eandem diametrum = 1, h. e. inter $3\frac{1}{4}$ & 3; $3\frac{1}{2}$ & 3; $3\frac{2}{3}$ & $3\frac{3}{5}$; $3\frac{3}{5}$ & $3\frac{1}{5}$; $3\frac{1}{4}$ & $3\frac{1}{2}$ &c. nihilominus tamen sola fractio $2\frac{5}{4}$ exhibet peripheriam veram diametri 1: nam 8:25 (§. 24.) = $1:2\frac{5}{4}$. Quod superest, Te Lector Benevole etiam atque etiam rogo, ne credas, me esse hominem tam perfritæ frontis, ut aliis solùm glaucoma objicere, & commenta pro veritatibus indubitatis obtrudere velim. Scio enim, non minus esse vitium, falsitates pertinaciter tueri, quàm evidentia impudenter negare. Quicumque argumenta, quæ hic in medium assero, pacato animo attentè, & rectè perpenderit, fateri debet, nisi propriæ convictioni contravenire voluerit, me hujusmodi reprehensionem non mereri. Postremò, per partes summæ $x \cdot y$ intelligendi sunt semper excessus & defectus; & 2da pars Corollarii §. 19. est ita legenda: Ratione, cujus Antecedens est 100, multiplicata per 2, 4, 6, aut alium numerum parem, evadit novus Antecedens quoque divisibilis per 8. Deinde §. 18 lin. 11 loco $1\frac{7}{8}$ debet esse $1\frac{7}{4}$; & §. 23 lin. 2 loco possit possint. Vale Lector Benevole, huncque exigui ingenii mei partum benignis intueri dignare oculis. Dabam Varavia ipsi Calendis Maji A. 1781.



1. DEFINITIO I. *Quadratura Circuli* est modus accuratè determinandi aream circuli in mensurà quadrata, inveniendique quadratum æquale cuius circulo dato.

2. COROLLARIUM. Quoniam circulus æquatur Triangulo, cuius basis peripheriæ circuli, altitudo verò æqualis radio; palam est, cardinem rei hic verti in determinanda ratione verà diametri ad peripheriam.

3. DEFINITIO II. *Quantitas excessiva* est ea, quæ constat ex vera & ex excessu supra veram.

4. COROLLARIUM. Ablato itaque excessu ex quantitate excessiva, relinquitur quantitas vera.

5. DEFINITIO III. *Quantitas defectiva* est ea, quæ deficit aliqua parte à vera. Pars deficiens vocatur *defectus*.

6. COROLLARIUM I. Addito itaque valore defectus ad quantitatem defectivam, prodit quoque quantitas vera.

7. COROLLARIUM II. Ablata quantitate vera ex excessiva, relinquitur excessus (§. 3.). Subducta autem quantitate defectiva ex excessiva, relinquitur præter excessum adhuc defectus. Nam sit quantitas excessiva $\equiv a$, excessus ejus supra veram $\equiv x$ & defectus à vera $\equiv y$; erit quantitas vera $\equiv a - x$ & defectiva $\equiv a - x - y$, quæ ablata ex excessiva a relinquit differentiam $x + y$, h. e. summam excessus & defectus, quam idcirco brevitatis gratia voco etiam *summam* $x + y$.

8. DEFINITIO IV. *Ratio excessiva* est comparatio 2 quantitatum (linearum, superficierum, corporum) quarum una est assumpta paulò major ac revera esse potest.

9. DEFINITIO V. *Ratio defectiva* est comparatio 2 quantitatum, quarum una est assumpta paulò minor, ac revera esse potest.

10. AXIOMA. Si ex aliquot quantitativibus ejusdem speciei & diametri per rationes excessivas inventis auferantur partes, quæ creduntur esse excessus; vel ad defectivas addantur partes, quæ supponuntur esse defectus, & semper prodeat idem quantum; erunt revera partes ablatae excessus, partes additæ defectus, & quantum, hoc modo determinatum, justum.

11. SCHOLION. *Sint lunula circuli (cujus diameter 2) excessiva* $\frac{8}{5}$ $\frac{12}{7}$ & $\frac{12}{9}$, & partes auferenda $\frac{2}{3}$ $\frac{2}{7}$ & $\frac{2}{9}$; erunt $\frac{8}{5} - \frac{2}{3} = \frac{14}{15} \equiv 1$; $\frac{12}{7} - \frac{2}{7} = \frac{10}{7} \equiv 1$; $\frac{12}{9} - \frac{2}{9} = \frac{10}{9} \equiv 1$. *Sint porro lunula defectiva* $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{7}$ atque $\frac{4}{9}$, & partes addenda $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{7}$ & $\frac{2}{9}$; erunt $\frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \equiv 1$; $\frac{4}{7} + \frac{2}{7} = \frac{6}{7} \equiv 1$; $\frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} \equiv 1$. Quoniam igitur lunula prodit sexies $\equiv 1$; necesse est, ut vi Axiomatis precedentis ea sit justa, & ut partes ablatae sint revera excessus, & partes additæ defectus. Confer. §. 28.

PROBLEMA I.

12. Determinare partes summæ, cujus numerator est aggregatum ex utroque factore denominatoris sui.

A

Sit

Sit denominator summæ $\equiv mo$ & numerator $\equiv o \dagger m$, h. e., sit ille aggregatum ex utroque factore $o \dagger m$ denominatoris mo ; erit summa ipsa $\frac{o \dagger m}{mo} = \frac{o}{mo} + \frac{m}{mo} = \frac{1}{m} + \frac{1}{o}$; ex quo fluit

Theorema: Si numerator summæ est aggregatum ex utroque factore denominatoris sui; necesse est, ut unus factor sit denominator unius partis, alter factor denominator alterius partis & unitas numerator utriusque partis.

13. SCHOLION. Non ignoro quidem, quamlibet summam innumeris modis in 2 partes resolvi posse: attamen quoniam hic solum de tali agitur, cujus numerator sit conflatus ex utroque factore denominatoris sui; nequeunt eam alia partes juxta hanc conditionem efficere, nisi quæ per Theorema præcedens fuerint determinatæ. Sic $\frac{3 \dagger 4}{4 \times 3} = \frac{3}{4} + \frac{4}{3}$; $\frac{5 \dagger 6}{6 \times 5} = \frac{5}{6} + \frac{6}{5}$;

$$\frac{7 \dagger 8}{8 \times 7} = \frac{7}{8} + \frac{8}{7}; \quad \frac{9 \dagger 10}{10 \times 9} = \frac{9}{10} + \frac{10}{9}; \quad \& \text{ ita porro.}$$

PROBLEMA II.

14. Determinare tam excessum, quàm defectum 2 peripheriarum, quarum altera per rationem excessivam, altera per defectivam fuit inventa.

Sit diameter 1, ratio ejus ad peripheriam excessivam (§. 8.) $\equiv a:b$ & defectiva (§. 9.) $\equiv d:e$. Quoniam peripheriæ investigantur per Regulam proportionum; inferatur. Ut diameter a ad peripheriam excessivam b (§. 3.), ita diameter 1 ad periph. excessivam $\frac{b}{a}$; & ut diameter d ad periph. defectivam e , (§. 5.) ita diameter 1 ad defectivam $\frac{e}{d}$.

Reductis deinde his peripheriis ad eandem denominationem, prodeunt æquivalentes $\frac{db}{ad}$ & $\frac{ae}{ad}$, quarum posterior ex priore ablata relinquit summam excessus & defectus $\equiv \frac{db - ae}{ad}$ (§. 7.). Sit jam hujus numerator

$db - ae \equiv$ denominatoribus $d \dagger a$ peripheriarum falsarum: quoniam æqualia possunt inter se permutari, & unum in alterius locum potest poni; palam est, quantitatem $\frac{d \dagger a}{ad}$ esse quoque summam excessus & defectus, cujus numerator est itaque conflatus ex utroque factore $d \dagger a$

denominatoris sui ad . Jam cum nullæ aliæ partes hanc summam ita producere queant, ut ejus numerator sit aggregatum ex utroque factore denominatoris sui, nisi $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{d}$ (§. 12. 13.); necesse est, ut altera harum partium sit excessus, altera defectus. Et quoniam peripheria excessiva $\frac{b}{a}$ constat ex vera atque ex excessu (§. 3.), & $\frac{1}{a}$ est ejus pars homogenea; dubitari nequit, quin $\frac{1}{a}$ sit excessus & per consequens

$\frac{1}{d}$ defectus. Jam cum quævis ratio excessiva quantitatis cognitæ ad incogni-

cognitam, si utraque in eadem proportionē crescīt & decrescīt, per $a : b$, & quāvis defectivā per $d : e$ designari possit; sequitur inde

Theorema: Si numerator summæ excessus & defectus 2 quantitatum est aggregatum ex denominatoribus simplicis quantitatum defectivæ & excessivæ; necesse est, ut denominator excessus sit idem ac quantitatis excessivæ, denominator defectus idem ac quantitatis defectivæ, & numerator utriusque unitas.

15. COROLLARIUM I. Pro determinando itaque excessu & defectu 2 quantitatum ejusdem speciei & diametri, assumendæ sunt semper 2 rationes, quarum altera sit excessiva, altera defectiva, & quarum Antecedentes sint diversi.

16. COROLLARIUM II. Quoniam denominator tam quantitatis excessivæ, quàm excessus est $\equiv a$, & Antecedens rationis excessivæ quoque $\equiv a$; denominator tam quantitatis defectivæ, quàm defectus $\equiv d$, & Antecedens rationis defectivæ, pariter $\equiv d$; in confesso est, cognito excessu & defectu 2 quantitatum, etiam Antecedentes rationum sciri posse, per quas uterque prodire debet.

THEOREMA I.

17. *Diameter est ad Peripheriam ut 8 : 25.*

DEMONSTRATIO. Ponendo ubique diametrum 1 pro 3tio termino proportionis & designando 1.) rationem diametri ad peripheriam excessivam $a : b$ per 8 : 26; defectivam $d : e$ autem per 16 : 49, prodeunt peripheriæ $\frac{26}{8}$ & $\frac{49}{16} = \frac{41\frac{1}{2}}{8}$ & $\frac{31\frac{1}{2}}{8}$, quæ ex se invicem ablata relinquunt summam $x + y = \frac{24}{8} = \frac{d + a}{ad} = \frac{16 + 8}{8 \times 16}$ (§. 7.), cujus numerator est itaque conflatus ex utroque factore $16 + 8$ denominatoris sui 128. Quare partes hujus summæ nequeunt esse aliæ nisi $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{16}$ (§. 12. 13.). Et quoniam factores $16 + 8$, ex quibus numerator summæ est conflatus, sunt unā denominatores peripheriarum defectivæ $\frac{49}{16}$ & excessivæ $\frac{26}{8}$; necesse est, ut $\frac{1}{8}$ sit excessus & $\frac{1}{16}$ defectus (§. 14.), consequenter peripheria vera $\frac{26}{8} - \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$ (§. 4.); vel $\frac{49}{16} + \frac{1}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$ (§. 6.). 2.) Assumptis rationibus 24 : 76 & 32 : 99 oriuntur peripheriæ $\frac{76}{24}$ & $\frac{99}{32} = \frac{24\frac{1}{2}}{8}$ & $\frac{23\frac{1}{2}}{8}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{66}{80}$, cujus numerator est aggregatum ex utroque denominatore $32 + 24$ peripheriarum falsarum: unde excessus est $\frac{1}{24}$ & defectus $\frac{1}{32}$, consequenter peripheria vera $\frac{76}{24} - \frac{1}{24} = \frac{75}{24} = \frac{25}{8}$; vel $\frac{99}{32} + \frac{1}{32} = \frac{100}{32} = \frac{25}{8}$. 3.) Per rationes 40 : 126 & 48 : 149 emergunt peripheriæ $\frac{126}{40}$ & $\frac{149}{48} = \frac{60\frac{1}{2}}{24}$ & $\frac{59\frac{1}{2}}{24}$, quæ à se invicem subtractæ manifestant summam $x + y = \frac{66}{1920}$, cujus numerator est conflatus ex utroque denominatore 40 & 48 peripheriarum falsarum: hinc excessus est $\frac{1}{40}$ & defectus $\frac{1}{48}$, consequenter peripheria vera $\frac{126}{40} - \frac{1}{40} = \frac{125}{40} = \frac{25}{8}$; vel $\frac{149}{48} + \frac{1}{48} = \frac{150}{48} = \frac{25}{8}$. 4.) Per rationes 56 : 176 & 64 : 199 prodeunt peripheriæ $\frac{176}{56}$ & $\frac{199}{64} = \frac{112\frac{1}{2}}{32}$ & $\frac{111\frac{1}{2}}{32}$, quibus ex se ablatis remanet summa $x + y = \frac{120}{3584}$, cujus numerator constat ex deno-

minatoribus 64 & 56 peripheriarum falsarum: ergo excessus est $\frac{1}{56}$ & defectus $\frac{1}{64}$, consequenter peripheria vera $\frac{176}{56} - \frac{1}{56} = \frac{175}{56} = 2\frac{3}{8}$; vel $\frac{192}{64} + \frac{1}{64} = \frac{193}{64} = 2\frac{3}{8}$. Cum igitur partes $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{48}$, & $\frac{1}{96}$ ex peripheriis excessivis ablatae, & partes $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{48}$, & $\frac{1}{96}$, ad defectivas additae producant octies eandem peripheriam $2\frac{3}{8}$; palam est, hanc esse justam, & revera quamlibet partem ablatam esse excessum & quamlibet additam defectum (§. 10.). Est igitur diameter ad peripheriam ut 1: $2\frac{3}{8}$, h. e. multiplicando utrinque per 8, ut 8: 25.

THEOREMA II.

18. *Ad determinandam peripheriam veram, cujus diameter est 1, neceſſe est, uti rationibus, quarum Antecedentes sint divisibiles per 8.*

DEMONSTRATIO: 1mo.) Per rationes 7: 22 & 9: 28 prodeunt peripheriae diametri 1 $= \frac{22}{7}$ & $\frac{28}{9} = \frac{198}{81}$ & $\frac{196}{81}$, quae ex se ablatae relinquunt summam $x + y = \frac{2}{81}$ (§. 7.), quae in partes resolvi nequit, quia ejus numerator non est aggregatum ex denominatoribus peripheriarum falsarum. Nihilominus tamen assumpta diametro 8, oriuntur per easdem rationes peripheria $\frac{176}{9}$ & $\frac{224}{9} = \frac{1584}{81}$ & $\frac{1568}{81}$, quae ex se subductae relinquunt summam $x + y = \frac{16}{81}$, cujus numerator est conflatus ex denominatoribus 9 + 7 peripheriarum falsarum. Ergo excessus est $\frac{1}{7}$ & defectus $\frac{1}{9}$ (§. 14.), consequenter peripheria vera $\frac{176}{9} - \frac{1}{9} = \frac{175}{9} = 2\frac{5}{9}$; vel $\frac{224}{9} + \frac{1}{9} = \frac{225}{9} = 2\frac{5}{9}$, ad quam diameter se habet ut 8: 25. Jam cum tam peripheria, quam earum excessus & defectus crescant & decrescant in ratione diametrorum, & diameter 1 sit octies minor diametro 8; necesse est, ut etiam excessus & defectus peripheriarum diametri 1 sit octies minor, quam $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$, nempe prior $\frac{1}{56}$ & posterior $\frac{1}{64}$. 2.) Per rationes 6: 19 & 10: 31 emergunt diametri 1 peripheria $\frac{19}{6}$ & $\frac{31}{10} = \frac{190}{60}$ & $\frac{186}{60}$, quibus à se invicem subtractis remanet summa $x + y = \frac{4}{60}$, quae est in partes irresolubilis, quia ejus numerator non constat ex denominatoribus peripheriarum falsarum. Attamen assumpta diametro 4, prodeunt per easdem rationes peripheria $\frac{76}{6}$ & $\frac{124}{10} = \frac{760}{60}$ & $\frac{744}{60}$, quae ex se ablatae relinquunt summam $x + y = \frac{16}{60}$, cujus numerator est aggregatum ex denominatoribus 10 + 6 peripheriarum falsarum. Ergo excessus est $\frac{1}{6}$ & defectus $\frac{1}{10}$, consequenter peripheria vera $\frac{76}{6} - \frac{1}{6} = \frac{75}{6}$; vel $\frac{124}{10} + \frac{1}{10} = \frac{125}{10}$, ad quam diameter se habet ut 4: $\frac{75}{8} = 24: 75 = 8: 25$; vel ut 4: $\frac{125}{8} = 40: 125 = 8: 25$. Cum autem diameter 1 sit quater minor diametro 4; necesse est, ut etiam excessus & defectus peripheriarum diametri 1 sit quater minor quam $\frac{1}{6}$ & $\frac{1}{10}$, nempe prior $\frac{1}{24}$ & posterior $\frac{1}{40}$. 3.) Per rationes 20: 63 & 4: 12 oriuntur diametri 1 peripheria $\frac{63}{20}$ & $\frac{12}{4} = \frac{252}{100}$ & $\frac{248}{100}$, quae ex se subductae relinquunt summam $x + y = \frac{12}{100}$, quae denuo in partes resolvi nequit, siquidem ejus numerator non est conflatus ex denominatoribus peripheriarum falsarum. Attamen assumpta diametro 2, emergunt per easdem rationes peripheria $\frac{126}{20}$ & $\frac{24}{4} = \frac{104}{100}$ & $\frac{100}{100}$, quae à se invicem subtractae relin-

relinquunt summam $x + y = \frac{24}{80}$, cujus numerator est aggregatum ex denominatoribus $4 + 20$ peripheriarum falsarum. Ergo excessus est $\frac{1}{20}$ & defectus $\frac{1}{40}$ consequenter periphæria vera $\frac{125}{200} = \frac{125}{200}$; vel $\frac{24}{40} + \frac{1}{40} = \frac{25}{40}$, ad quam diameter se habet ut $2 : \frac{25}{40} = 40 : 125 = 8 : 25$; vel ut $2 : \frac{25}{40} = 8 : 25$. Cum autem diameter 1 sit bis minor diametro 2; necesse est etiam, ut excessus & defectus peripheriarum diametri 1 sit bis minor: nempe excessus $\frac{1}{40}$ & defectus $\frac{1}{80}$. Jam cum denominatores partium $\frac{1}{20}$ & $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{24}$ & $\frac{1}{48}$; $\frac{1}{30}$ & $\frac{1}{60}$ sint facta ex Antecedentibus rationum $7 : 22$ & $9 : 28$; $6 : 19$ & $10 : 31$; $20 : 63$ & $4 : 12$ in diametros 8, 4 & 2; & eadem facta sint quoque Antecedentes rationum his partibus determinandis inservientium (§. 16.); necesse est, etiam consequentes dictarum rationum in easdem diametros ducere, ut emergant rationes æquales $56 : 176$ & $72 : 224$; $24 : 76$ & $40 : 124$; $40 : 126$ & $8 : 24$. Jam cum Antecedentes harum rationum sint 7×8 & 9×8 ; 3×8 & 5×8 ; 5×8 & 1×8 ; & Antecedentes omnium aliarum rationum, investigandis peripheriis diametri 1 inservientium, sint resolvable in 2 factores, quorum unus semper est 8; manifestum est, ad determinandam periph. veram, cujus diameter est 1, utendum esse rationibus, quarum Antecedentes sint divisibiles per 8.

19. COROLLARIUM. Rationes igitur, quarum Antecedentes non sunt divisibiles per 8, ducendæ sunt in hunc numerum. Ratio, cujus Antecedens est 100, multiplicata per 2, 4, 6, aut alium numerum parem, evadit quoque divisibilis per 8.

PROBLEMA III.

20. Determinare excessum & defectum 2 quantitatum e. gr. peripheriarum ejusdem diametri, quando numerator summæ $x + y$ est aggregatum; vel ex denominatore multiplo unius & simplo alterius periphæria falsæ; vel ex utroque denominatore multiplo.

Sit numerus, qui indicat, denominatorem periphæriæ falsæ pluries quàm semel in numeratore summæ contineri, $= m$; & quoniam summa $x + y$ est $= \frac{db - ae}{ad}$ (§. 14.): sit hujus numerator $db - ae = md + a$;

vel $d + ma$; vel $md + ma$, h. e. sit ille aggregatum ex multiplo denominatore periphæriæ defectivæ, & simplo excessivæ; vel ex simplo defectivæ & multiplo excessivæ; vel ex utroque multiplo denominatore peripheriarum falsarum. Quoniam æqualia æqualibus substitui possunt: erunt in 1mo casu summa excessus & defectus $\frac{md + a}{ad}$ & partes ejus $\frac{md}{ad} + \frac{a}{ad}$ $= \frac{m}{a} + \frac{1}{d}$; in secundo $\frac{d + ma}{ad}$ & partes $\frac{d}{ad} + \frac{ma}{ad} = \frac{1}{a} + \frac{m}{d}$; in 3tio $\frac{md + ma}{ad}$ & partes $\frac{md}{ad} + \frac{ma}{ad} = \frac{m}{a} + \frac{m}{d}$. Jam cum etiam aliæ quantitates per rationes excessivas & defectivas inventæ, in quibus hæ conditiones locum habent, per easdem literas possint denotari; sequitur inde.

Regula: 1.) Si numerator summæ $x+y$ est aggregatum ex multiplo denominatore quantitatis defectivæ & simplo excessivæ, subscribatur numero, qui indicat, quoties denominator defectivæ contineatur in numeratore summæ, denominator excessivæ, & unitati denominator defectivæ. **2.)** Si numerator summæ est aggregatum ex denominatore simplo quantitatis defectivæ & multiplo excessivæ, subscribatur numero, qui indicat, quoties denominator excessivæ contineatur in numeratore summæ, denominator defectivæ & unitati denominator excessivæ. **3.)** Si numerator summæ est aggregatum ex utroque denominatore multiplo quantitatum falsarum, subscribatur numero, indicanti multipulum unius denominatoris, denominator alter. Hoc pacto prodeunt semper 2 partes, quarum una, habens cum quantitate excessivæ eundem denominatorem, est excessus & altera defectus.

21. SCHOLION. Usus hujus triplicis Regula patebit ex sequentibus: **1.)** Per rationes $100 : 325 = 200 : 650$ & $1 : 3 = 8 : 24$ (§. 19.) produnt periphæria $\frac{233}{24}$ & $2\frac{1}{24} = \frac{49}{24}$ & $\frac{49}{24}$, quæ ex se ablata relinquant summam $x+y = \frac{49}{24}$, cujus numerator est constatus ex denominatore simplo 200 periphæria exc. & adhuc ex 200, in quo numero denominator 8 periphæria defectivæ contineatur 25 vicibus. Scribendo itaque sub 25 denominatorem 200 periphæria exc. & sub 1 denominatorem 8 periphæria defectivæ, prodit excessus $\frac{200}{24}$ & defectus $\frac{1}{24}$ (§. 20. n. 1.). **2.** Per rationes $8 : 26$ & $100 : 301 = 200 : 602$ emergunt diametri 1 periphæria $2\frac{6}{26}$ & $\frac{602}{26} = \frac{301}{13}$ & $\frac{301}{13}$, quæ ex se sublata relinquant summam $x+y = \frac{301}{13}$, cujus numerator est aggregatum ex denominatore simplo 200 periphæria defectivæ & adhuc ex numero 184, in quo denominator 8 periph. excessivæ contineatur 23 vicibus. Ponendo ergo sub 23 denominatorem periph. defectivæ & sub 1 denominatorem excessivæ, prodit defectus $\frac{23}{13}$ & excessus $\frac{1}{13}$ (n. 2.). **3.)** Per rationem Archimedis $71 : 223 = 568 : 1784$ & defectivam $7 : 21 = 56 : 168$ (§. 19.) oriuntur periph. $\frac{1784}{223}$ & $\frac{168}{21} = \frac{8}{1}$ & $\frac{8}{1}$, quæ à se subractæ manifestant summam $x+y = \frac{1784}{223}$, cujus numerator constat ex 3976, b. e. ex septuplo denominatore 568 periphæria Archimedæ & ex 504, b. e. ex noncuplo denominatore 56 periph. defectivæ. Scribendo igitur sub 7 denominatorem 56 periphæria defectivæ & sub 9 denominatorem 568 periph. Archimedæ, prodit excessus $\frac{568}{223}$ & defectus $\frac{7}{223}$ (n. 3.). Sed ne hujusmodi resolutio in partes facessat negotium, sit

PROBLEMA IV.

22. Reperire, quoties denominator tam major, quàm minor 2 quantitatum falsarum contineatur in numeratore summæ $x+y$, ut inde excessus & defectus facillè determinari queat.

RESOLUTIO. Imo: ex numeratore summæ auferatur denominator major quantitatum falsarum, ut habeatur ima differentia; ex hac ima differentia subducatur idem denominator, ut prodeat differentia 2da; ex hac auferatur quoque denominator major, ut obtineatur 3tia diffe-

differentia; & hæc subtractio tamdiu continuetur, donec denominator major amplius subtrahi nequeat. 2do: Fiat periculum, quota differentia per denominatorem minorem exactè dividi possit, & scribatur sub Quoto ex hac divisione orto denominator major, & sub numero, qui indicat, quota differentia sit per denominatorem minorem divisibilis, denominator minor. Hoc pacto prodeunt semper 2 partes, quarum illæ, quæ cum quantitate excessiva gaudet eodem denominatore, est excessus, & altera defectus.

| |
|------|
| 4480 |
| 568 |
| 3912 |
| 3344 |
| 2776 |
| 2208 |
| 1640 |
| 1072 |
| 504 |

E. gr. Ex 3tio exemplo §. præcedentis liquet, summam $x + y$ esse $\frac{4480}{568}$; peripheriam excessivam $\frac{1784}{568}$ & defectivam $\frac{168}{568}$. Ablato itaque denominatore majore 568 ex numeratore summæ methodo prædicta, prodeunt, ut hic videre est, 7 differentiæ, quarum sola 7ma 504 per denominatorem minorem 56 exactè dividi potest. Scribatur itaque sub Quoto 9 ex hac divisione orto denominator major 568, & sub 7, quia solum 7ma differentia est ita divisibilis, denominator minor 56, ita prodit excessus $\frac{2}{56}$ & defectus $\frac{7}{56}$.

DEMONSTRATIO. Quoniam differentia 1ma 3912 est $\frac{4480}{568}$; 2da 3344 $\frac{4480}{568} - 568 \times 2 = 1136$; 3tia 2776 $\frac{4480}{568} - 568 \times 3 = 1704$; 4ta 2208 $\frac{4480}{568} - 568 \times 4 = 2272$; 5ta 1640 $\frac{4480}{568} - 568 \times 5 = 2840$; 6ta 1072 $\frac{4480}{568} - 568 \times 6 = 3408$; 7ma 504 $\frac{4480}{568} - 568 \times 7 = 3976$; evidens est, differentiam 1mam cum simplo; 2dam cum duplo; 3tiam cum triplo; 4tam cum quadruplo; 5tam cum quintuplo; 6tam cum sextuplo & 7mam differentiam cum septuplo denominatore majore 568 efficere semper numeratorem summæ. Quoniam igitur sola 7ma differentia 504 continet denominatorem minorem 56 novies & cum septuplo denominatore majore 568 $\frac{4480}{568} - 568 \times 7 = 3976$ præcisè constituit numeratorem summæ: liquet, hunc numeratorem esse conflatum ex noncuplo denominatore minore 56 & septuplo majore 568, h. e. ex noncuplo denominatore peripheriæ defectivæ & ex septuplo excessivæ: unde excessus debet esse $\frac{2}{56}$ & defectus $\frac{7}{56}$ (§. 20. n. 3.). Jam cum numerator cujuslibet summæ $x + y$ possit hac methodo resolvi in duos numeros, quorum alter denominatorem minorem, alter majorem semel vel pluries contineat; perspicuum est, scribendo sub Quoto ex divisione differentiæ per denominatorem minorem orto denominatorem majorem, & sub numero, qui indicat, num hæc differentia, ita divisibilis, sit 1ma, 2da &c. denominatorem minorem, prodire semper excessum & defectum.

23. **SCHOLION.** Si plures differentia, quam una, per denominatorem minorem quantitatum falsarum exactè dividi possit; id indicio est, summam $x + y$ in varias partes posse resolvi, consequenter vel rationem excessivam; vel defectivam; vel utramque simul à vera nimis recedere: adeoque assumenda sunt rationes aliæ paulò magis ad veram accedentes.

THEO-

THEOREMA III.

24. Omnes numeri à 4 usque ad 100, 200 &c. possunt esse Antecedentes rationum pro determinanda peripheria vera diametri 8 assumendarum, quæ nequit esse alia nisi = 25.

DEMONSTRATIO. Posita ubique diametro 8 pro 3tio termino proportionis & assumtis rationibus imo:) ut 4:13 & ut 5:15, prodeunt peripheriæ $\frac{104}{13}$ & $\frac{120}{15} = \frac{220}{15}$ & $\frac{480}{15}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x+y = \frac{480}{15}$. Auferendo itaque imo ex ejus numeratore, & deinde ex quavis differentia inventa denominatorem majorem peripheriarum falsarum = 5, patebit, solam 4tam differentiam 20 per denominatorem minorem 4 exactè dividi posse. Ponendo itaque sub Quoto = 5 ex hac divisione orto denominatorem majorem 5 & sub numero 4 indicante, differentiam 4tam ita esse divisibilem, denominatorem minorem 4, prodeunt partes $\frac{5}{4}$ & $\frac{3}{4}$, quarum posterior utpote ejusdem denominationis cum peripheria excessiva $\frac{104}{13}$ est excessus & prior defectus (§. 22.): unde peripheria vera est $\frac{104}{13} - \frac{4}{13} = \frac{120}{15} = 25$; vel $\frac{120}{15} + \frac{5}{15} = \frac{125}{15} = 25$. 2.) Per rationes 6:19 & 7:21 oriuntur peripheriæ $\frac{112}{19}$ & $\frac{168}{21} = \frac{1064}{42}$ & $\frac{1808}{42}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x+y = \frac{1808}{42}$ cujus partes sunt $\frac{7}{42}$ & $\frac{35}{42}$, quia sola 2da differentia 42 divisa per denominatorem minorem 6 exhibet Quotum 7. Ergo peripheria vera est $\frac{112}{19} - \frac{6}{19} = \frac{150}{19} = 25$, vel $\frac{168}{21} + \frac{7}{21} = \frac{175}{21} = 25$. 3.) Per rationes 8:26 & 9:28 emergunt peripheriæ $\frac{208}{26}$ & $\frac{224}{28} = \frac{1672}{72}$ & $\frac{1792}{72}$, quibus à se invicem subtractis remanet summa $x+y = \frac{160}{72}$ cujus partes sunt $\frac{8}{72}$ & $\frac{16}{72}$, quia sola octava differentia 8 divisibilis est per denominatorem minorem 8. Ergo peripheria vera est $\frac{208}{26} - \frac{8}{26} = \frac{200}{26} = 25$; vel $\frac{224}{28} + \frac{9}{28} = \frac{233}{28} = 25$. 4.) Per rationes 100:314 & 11:34 prodeunt peripheriæ $\frac{2112}{314}$ & $\frac{272}{11} = \frac{27532}{1133}$ & $\frac{2720}{1133}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x+y = \frac{4332}{1133}$, cujus partes sunt $\frac{3}{1133}$ & $\frac{1130}{1133}$, quia sola differentia 314 132 est divisibilis per denominatorem minorem 11. Ergo periph. vera est $\frac{2112}{314} - \frac{11}{314} = \frac{2101}{314} = 25$; vel $\frac{272}{11} + \frac{3}{11} = \frac{275}{11} = 25$. 5.) Per rationem Metii 113:355 & defectivam 19:59 oriuntur peripheriæ $\frac{2840}{113}$ & $\frac{472}{19} = \frac{11960}{2147}$ & $\frac{11336}{2147}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x+y = \frac{624}{2147}$, cujus partes sunt $\frac{3}{2147}$ & $\frac{114}{2147}$ quia sola 3tia differentia 285 divisa per denominatorem minorem 19 prodit quotum 15. Ergo peripheria vera est $\frac{2840}{113} - \frac{19}{113} = \frac{2821}{113} = 25$; vel $\frac{472}{19} + \frac{3}{19} = \frac{475}{19} = 25$. 6.) Per rationem D. Durvæ Parochi in Normannia = 567:1792 & defectivam 10:31 emergunt peripheriæ $\frac{14336}{567}$ & $\frac{240}{10} = \frac{143360}{5670}$ & $\frac{140616}{5670}$, quibus à se invicem subtractis remanet summa $x+y = \frac{2720}{5670}$, cujus partes sunt $\frac{2}{5670}$ & $\frac{1360}{5670}$, quia sola differentia 2da 1610 divisa per denominatorem minorem 10 manifestat Quotum 161. Ergo peripheria vera est $\frac{14336}{567} - \frac{10}{567} = \frac{14326}{567} = 25$; vel $\frac{240}{10} + \frac{2}{10} = \frac{242}{10} = 25$. Cum igitur partes, hic 6 & in Scholio sequente 18, ex peripheriis excessivis ablata, & partes, hic 6 & in Scholio sequente 18, ad peripherias defectivas additæ

addita producant quadragies octies eandem peripheriam 25; palam est, hanc esse veram, partes ablatas excessus & additas defectus (§. 10.). Jam cum per innumeras rationes, quarum alia sunt paulo majores, alia paulo minores, quam 1: 3½, *semper & sine ulla exceptione* peripheria diametri 8 prodeat = 25; manifestum est, omnes numeros à 4 usque ad 100, 200 &c. esse posse Antecedentes rationum pro determinanda peripheria vera assumendarum, quæ nequit esse alia nisi = 25.

SCHOLIUM.

25. Ut veritas Theorematis præcedentis magis in apicem proferatur; consultum judico ex infinitis paribus rationum, per quæ peripheria diametri 8 prodeat = 25, adducere adhuc 18 paria sequentia: 9: 29 & 10: 31; 11: 35 & 12: 37; 13: 41 & 14: 43; 15: 47 & 16: 49; 17: 54 & 18: 56; 19: 60 & 20: 62; 21: 66 & 22: 68; 23: 72 & 24: 74; 25: 79 & 26: 80; 27: 85 & 28: 87; 29: 91 & 30: 93; 31: 97 & 32: 99; 33: 104 & 34: 106; 35: 110 & 36: 112; 37: 116 & 38: 118; 39: 122 & 40: 124; 41: 129 & 42: 131; 43: 135 & 44: 137.

26. COROLLARIUM I. Est itaque diameter ad peripheriam, ut 8: 25, consequenter quadratum diametri ad circulum ut 64: 50 = 32: 25, & cubus diametri ad spheram, ut 512: 1500, h. e. multiplicando utrinque per 6, & dividendo deinde per 64, ut 48: 25.

27. COROLLARIUM II. Quoniam posito numero 8, qui est Antecedens rationis veræ 8: 25, pro 3tio termino proportionis, prodeat semper peripheria = 25; palam est, si posito Antecedente rationis e. gr. quadrati diametri ad lunulam = 4: 1; vel ad circulum = 32: 25, vel ad segmentum = 64: 9; vel cubi diametri ad spheram = 48: 25 pro 3tio termino proportionis, emergat, factis faciendis, semper idem consequens, rationem ipsam esse veram.

THEOREMA IV.

28. Ratio Quadrati diametri ad lunulam = 4: 1 est vera.

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente rationis = 4: 1 pro 3tio termino proportionis, & assumtis rationibus 1mo:) ut 5: 2 & 6: 1 (§. 15.), prodeunt lunulæ $\frac{5}{2}$ & $\frac{6}{1} = \frac{4\frac{1}{2}}{2}$ & $\frac{2\frac{1}{2}}{1}$, quæ ex se ablatæ relinquunt summam $x + y = \frac{4\frac{1}{2}}{2}$ (§. 7.), cujus partes sunt $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$, quia sola 3tia differentia 10 per denominatorem minorem 5 divisa exhibet Quotum 2 (§. 22.). Ergo lunula vera est $\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$; vel $\frac{6}{1} - \frac{2\frac{1}{2}}{1} = \frac{4\frac{1}{2}}{1} - \frac{2\frac{1}{2}}{1} = \frac{2}{1}$. 2.) Per rationes 7: 3 & 8: 1 emergunt lunulæ $\frac{7}{3}$ & $\frac{8}{1} = \frac{2\frac{2}{3}}{1}$ & $\frac{2\frac{2}{3}}{1}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{6\frac{2}{3}}{3}$, cujus partes sunt $\frac{4}{3}$ & $\frac{2}{3}$, quia sola 3ta differentia 28 divisa per denominatorem minorem 7 exhibet Quotum 4: unde lunula vera est $\frac{7}{3} - \frac{4}{3} = \frac{3}{3} = 1$; vel $\frac{8}{1} - \frac{2\frac{2}{3}}{1} = \frac{5\frac{2}{3}}{1} - \frac{2\frac{2}{3}}{1} = \frac{3}{1}$. 3.) Per rationes 9: 3 & 10: 2 oriuntur lunulæ $\frac{9}{3}$ & $\frac{10}{2} = \frac{5}{1}$ & $\frac{5}{1}$, quibus à se invicem subtractis remanet summa $x + y = \frac{4}{1}$, cujus partes sunt $\frac{3}{1}$ & $\frac{1}{1}$, quia sola 3tia differentia 18 divisa per de

nominatorem minorem 9 prodit Quotum 2. Ergo lunula vera est $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 1$; vel $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 1$. Cum igitur partes hic 3 & in Scholio sequenti 9 ex lunulis excessivis ablatae, & partes, hic 3 & in Scholio sequente 9, ad defectivas additae producant vicies quater eandem lunulam $= 1$; perspicuum est; hanc esse justam (§. 10.), consequenter rationem quadrati diametri ad eam ut 4: 1 esse veram (§. 27.)

SCHOLIUM.

29. Ut veritas Theorematis praecedentis luculentius pateat; adjicio ex infinitis rationum paribus, per quae lunula circuli, cujus quadratum diametri $= 4$, prodit semper $= 1$, adhuc 9 sequentia: 11: 4 & 12: 2; 13: 5 & 14: 3; 15: 5 & 16: 3; 17: 5 & 18: 4; 19: 6 & 20: 4; 21: 6 & 22: 5; 23: 7 & 24: 5; 25: 8 & 26: 6; 27: 8 & 28: 5.

30. COROLLARIUM. Quoniam ex Theoremate Hippocratis liquet, Quadratum diam. esse ad lunulam ut 4: 1, & eadem ratio per innumeras rationes, quarum aliae sunt paulò majores, aliae paulò minores, quàm 4: 1, semper & sine ulla exceptione prodit; manifestum est, è solis 2 limitibus quantitatem incognitam, quae cum cognita in eadem ratione crescit, observatis observandis, semper posse determinari.

THEOREMA V.

31. Ratio Quadrati diametri ad circulum ut 32: 25 (§. 26.) est vera.

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente hujus rationis pro 3tio termino proportionis (§. 27.), & assumtis rationibus 1mo:) ut 14: 11 & 13: 10, prodeunt circuli $\frac{1}{14}$ & $\frac{1}{13} = \frac{1}{182}$ & $\frac{1}{130}$, qui ex se ablati relinquunt summam $x + y = \frac{1}{130}$, cujus partes sunt $\frac{1}{13}$ & $\frac{1}{13}$, quia sola ista differentia 26 divisa per denominatorem minorem 13 exhibet quotum 2 (§. 22.). Ergo circulus verus est $\frac{1}{14} - \frac{1}{13} = \frac{1}{182} = 25$; vel $\frac{1}{13} + \frac{1}{13} = \frac{2}{13} = 25$. 2.) Per rationes 23: 18 & 17: 13 oriuntur circuli $\frac{1}{23}$ & $\frac{1}{17} = \frac{1}{401}$ & $\frac{1}{201}$, qui ex se subducti manifestant summam $x + y = \frac{2}{401}$, cujus partes sunt $\frac{1}{201}$ & $\frac{1}{201}$, quia sola ista differentia 17 divisa per denominatorem minorem 17 prodit quotum $= 1$. Ergo circulus verus est $\frac{1}{23} - \frac{1}{17} = \frac{1}{401} = 25$; vel $\frac{1}{17} + \frac{1}{17} = \frac{2}{17} = 25$. 3.) Per rationes 1000: 785 & 9: 7 emergunt circuli $\frac{1}{1000}$ & $\frac{1}{224} = \frac{1}{25600}$ & $\frac{1}{25600}$, quibus à se subtractis remanet summa $x + y = \frac{1}{25600}$, cujus partes sunt $\frac{1}{25600}$ & $\frac{1}{25600}$, quia sola ista differentia 1080 divisa per denominatorem 9 dat quotum 120. Ergo circulus verus est $\frac{1}{1000} - \frac{1}{224} = \frac{1}{25600} = 25$; vel $\frac{1}{224} + \frac{1}{224} = \frac{1}{112} = 25$. Jam cum per innumeras rationes, quarum aliae sunt paulò majores, aliae paulò minores quàm 32: 25, prodeat semper idem circulus $= 25$; palam est, Quadratum diametri esse ad circulum ut 32: 25 (§. 10. 26.).

32. COROLLARIUM. Quoniam igitur Quadratum diametri est ad circulum ut 32: 25 $= 64: 50$; evidens est, radicem hujus Quadrati, h. e.

ti, h. e. diametrum esse 8, & ejus 4tam partem 2, per quam circuli area divisa manifestat peripheriam $\equiv 25$. Ergo independenter ab ante demonstratis diameter est ad peripheriam ut 8: 25.

THEOREMA VI.

33. Ratio Quadrati diametri ad segmentum $\equiv 64: 9$ (§. 27.) est vera.

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente 64 hujus rationis pro 3tio termino proportionis & assumtis rationibus imo: ut 20: 3 & 43: 6, prodeunt segmenta $\frac{192}{20}$ & $\frac{354}{43} \equiv \frac{8256}{860}$ & $\frac{7680}{860}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y \equiv \frac{648}{860}$ (§. 7.), cujus partes sunt $\frac{12}{23}$ & $\frac{4}{23}$, quia sola 12ma differentia 60, divisa per denominatorem minorem 20, exhibet quotum 3 (§. 22.). Ergo segmentum verum est $\frac{192}{20} - \frac{12}{23} \equiv \frac{448}{230} \equiv 9$; vel $\frac{354}{43} - \frac{4}{23} \equiv \frac{387}{23} \equiv 9$. 2) Per rationes 49: 7 & 57: 8 oriuntur segmenta $\frac{448}{49}$ & $\frac{512}{57} \equiv \frac{25536}{2703}$ & $\frac{25068}{2703}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y \equiv \frac{446}{2703}$, cujus partes sunt $\frac{7}{25}$ & $\frac{1}{57}$, quia sola 7ma differentia 49 divisa per denominatorem minorem 49 manifestat quotum 1. Ergo segmentum verum est $\frac{448}{49} - \frac{7}{25} \equiv \frac{441}{25} \equiv 9$; vel $\frac{512}{57} - \frac{1}{57} \equiv \frac{511}{57} \equiv 9$. 3) Per rationes 70: 10 & 86: 12 emergunt segmenta $\frac{640}{70}$ & $\frac{768}{86} \equiv \frac{6400}{860}$ & $\frac{8960}{860}$, quibus à se subtractis remanet summa $x + y \equiv \frac{1280}{860}$, cujus partes sunt $\frac{10}{70}$ & $\frac{8}{86}$, quia sola 1ma differentia 420 divisa per denominatorem minorem 70 dat quotum 6. Ergo segmentum verum est $\frac{640}{70} - \frac{10}{70} \equiv \frac{630}{70} \equiv 9$; vel $\frac{768}{86} - \frac{8}{86} \equiv \frac{760}{86} \equiv 9$. Jam cum per innumeras rationes, quarum aliæ sunt paulò majores, aliæ paulò minores quàm 64: 9, factis faciendis, prodeat semper idem segmentum $\equiv 9$; palam est, id esse verum (§. 10.), consequenter rationem quadrati diametri ad illud $\equiv 64: 9$ esse veram (§. 27.).

34. COROLLARIUM. Quoniam igitur, posito quadrato diametri 64, lunula est 16 (§. 28.) & segmentum 9 (§. 33.); perspicuum est, semicirculum, quippe qui est conflatus ex utroque, esse $\equiv 16 + 9 \equiv 25$, & circulum integrum 50. Est igitur Quadratum diametri ad aream circuli independenter ab ante demonstratis ut 64: 50, consequenter diameter ad peripheriam ut 8: 25 (§. 32.).

THEOREMA VII.

35. Ratio cubi diametri ad sphaeram ut 48: 25 (§. 26.) est vera.

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente 48 hujus rationis pro 3tio termino proportionis, & assumtis rationibus imo: ut 17: 9 & 25: 13, prodeunt sphaera $\frac{432}{17}$ & $\frac{624}{25} \equiv \frac{10800}{425}$ & $\frac{10608}{425}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y \equiv \frac{122}{425}$, cujus partes sunt $\frac{2}{17}$ & $\frac{1}{25}$, quia sola 7ma differentia 17 divisa per denominatorem minorem 17 exhibet quotum 1. Ergo sphaera vera est $\frac{432}{17} - \frac{2}{17} \equiv \frac{430}{17} \equiv 25$; vel $\frac{624}{25} - \frac{1}{25} \equiv \frac{623}{25} \equiv 25$. 2. Per rationes 90: 47 & 75: 39 oriuntur sphaera $\frac{2256}{90}$ & $\frac{1872}{75} \equiv \frac{109200}{8750}$ & $\frac{108480}{8750}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y \equiv \frac{720}{8750}$, cujus partes sunt $\frac{6}{90}$ & $\frac{3}{75}$, quia sola 3tia differen-

tia 450 divisa per denominatorem minorem 75 manifestat quatum 6 (§. 22.). Ergo sphæra vera est $\frac{2256}{96} - \frac{96}{96} = \frac{2250}{96} = 25$; vel $\frac{1672}{72} + \frac{3}{72} = \frac{1675}{72} = 25$. 3.) Per rationes 300: 157 & 27: 14, procedunt sphæra $\frac{7536}{216}$ & $\frac{672}{27} = \frac{203472}{81000}$ & $\frac{201600}{81000}$, quibus à se ablatis remanet summa $x + y = \frac{1512}{81000}$, cujus partes sunt $\frac{36}{81000}$ & $\frac{3}{27}$, quia sola 3tia differentia 972 divisa per denominatorem minorem 27 dat quatum 36. Ergo sphæra vera est $\frac{7536}{216} - \frac{36}{216} = \frac{7500}{216} = 25$; vel $\frac{672}{27} + \frac{3}{27} = \frac{675}{27} = 25$. (§. 10.). Jam cum per innumeras rationes, quarum alia sunt paulo majores, alia paulo minores, quàm 48: 25, observatis observandis, prodeat semper eadem sphæra = 25; evidens est, hanc esse veram. Ergo cutus diametri est ad sphæram, ut 48: 25 (§. 10. 27.).

36. COROLLARIUM. Ratio 48: 25 multiplicata per 64 & divisa deinde per 6, exhibet æqualem 512: $\frac{1600}{6}$. Ergo cubus diametri est ad sphæram, ut 512: $\frac{1600}{6}$. Jam cum radix hujus cubi, h. e. diameter sit 8; palam est, dividendo per hujus 6tam partem = $\frac{1}{6}$ sphæram $\frac{1600}{6}$, prodire superficiem $\frac{9600}{6}$, quæ poro divisa per diametrum integram, emergit periphæria = 25. Ergo independenter ab ante demonstratis diameter est ad periph. ut 8: 25.

THEOREMA VIII.

37. Lunula ADBEA est ad segmentum AEBCA (§. 42. fig. 2) ut 16: 9.

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente 16 pro 3tio termino proportionis, procedunt imo:) per rationes 7: 4 & 6: 3 segmenta $\frac{64}{7}$ & $\frac{48}{6} = \frac{384}{42}$ & $\frac{32}{6}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y = \frac{48}{42}$, cujus partes sunt $\frac{1}{6}$ & $\frac{6}{6}$, quia sola 6ta differentia 6 per denominatorem minorem 6 divisa exhibet Quatum = 1. (§. 22.). 2.) Per rationes 10: 6 & 11: 6 oriuntur segmenta $\frac{76}{10}$ & $\frac{96}{11} = \frac{1056}{110}$ & $\frac{96}{110}$, quæ ex se subducta relinquunt summam $x + y = \frac{96}{110}$, cujus partes sunt $\frac{1}{10}$ & $\frac{3}{11}$, quia sola 6ta differentia 30 divisa per denominatorem minorem 10 exhibet quatum 3. 3.) Per rationes 17: 10 & 18: 10 emergunt segmenta $\frac{160}{17}$ & $\frac{160}{18} = \frac{2880}{306}$ & $\frac{2720}{306}$, quibus à se subtractis remanet summa $x + y = \frac{160}{306}$, cujus partes sunt $\frac{1}{17}$ & $\frac{1}{18}$, quia sola differentia 7ma 34 divisa per denominatorem minorem 17 prodit quatum 2. 4.) Per rationes 19: 11 & 20: 11 procedunt segmenta $\frac{176}{19}$ & $\frac{176}{20} = \frac{3520}{395}$ & $\frac{3344}{395}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y = \frac{176}{395}$, cujus partes sunt $\frac{1}{19}$ & $\frac{1}{20}$, quia sola 5ta differentia 76 divisa per denominatorem minorem 19 manifestat quatum 4. (§. 22.). 5.) Per rationes 21: 12 & 22: 12 oriuntur segmenta $\frac{192}{21}$ & $\frac{192}{22} = \frac{4224}{462}$ & $\frac{4072}{462}$, quæ ex se subducta relinquunt summam $x + y = \frac{192}{462}$, cujus partes sunt $\frac{1}{21}$ & $\frac{6}{22}$, quia sola 3tia differentia 126 divisa per denominatorem minorem 21 exhibet quatum 6. 6.) Per rationes 23: 13 & 24: 13 emergunt segmenta $\frac{208}{23}$ & $\frac{208}{24} = \frac{4992}{596}$ & $\frac{4784}{596}$, quibus à se subtractis remanet summa $x + y = \frac{208}{596}$, cujus partes sunt $\frac{1}{23}$ & $\frac{8}{24}$, quia sola 1ma differentia 184 divisa per denomi-

nominatorem minorem 23 dat quatum 8. 7.) Per rationes 25: 15 & 26: 14 prodeunt segmenta $\frac{24}{27}$ & $\frac{22}{28} = \frac{624}{756}$ & $\frac{600}{756}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y = \frac{64}{756}$, cujus partes sunt $\frac{16}{27}$ & $\frac{12}{28}$, quia sola 15ta differentia 250 divisa per denominatorem minorem 25 exhibet quatum 10. 8.) Per rationes 27: 16 & 28: 15 oriuntur segmenta $\frac{26}{27}$ & $\frac{24}{28} = \frac{7168}{756}$ & $\frac{6480}{756}$, quæ ex se subducta relinquunt summam $x + y = \frac{688}{756}$, cujus partes sunt $\frac{13}{27}$ & $\frac{12}{28}$, quia sola 13tia differentia 324 divisa per denominatorem minorem 27 prodit quatum 12. Jam cum ablatis ex segmentis excessivis partibus ejusdem cum illis denominationis, & additis ad defectiva partibus, quæ cum his communibus gaudent denominatoribus, prodeat semper segmentum $= 9$, & idem etiam per innumeras rationes, quarum aliæ sunt paulo majores, aliæ paulo minores, quàm 16: 9, semper determinari possit; evidens est, segmentum $= 9$ esse verum (§. 10.). Ergo lunula est ad segmentum ut 16: 9. (§. 27.).

38. COROLLARIUM. Posita lunula $= 16$, quadratum diametri est 64, quod est itaque ad segmentum ut 64: 9. Ergo diameter est ad periph. ut 8: 3 (§. 34.).

PROBLEMA V.

39. *Construere quadratum æquale circulo dato.*

RESOLUTIO. 1.) Diameter circuli dati dividatur in 8 partes æquales. 2.) Jungantur 2 lineæ 5 talium partium ad angulum rectum & ducatur hypothenusa. Dico Quadratum hujus hypothenusæ esse æquale circulo dato.

DEMONSTRATIO. Quoniam uterque Cathetus continet per constructionem 5 partes diametri; manifestum est, quadrata utriusque esse $= 25 + 25 = 50$; consequenter etiam quadratum hypothenusæ $= 50$; sed circulus, cujus diameter est 8 partium, est quoque $= 50$ (§. 26. 32.). Ergo quadratum dictæ hypothenusæ est æquale circulo dato.

PROBLEMA VI.

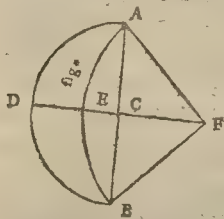
40. *Describere circumulum æqualem quadrato dato.*

RESOLUTIO. 1.) In quadrato dato ducantur 2 diagonales sese intersecantes, ita orientur 4 Triangula rectangula, quorum Catheti erunt inter se æquales, & hypothenusæ quoque æquales. 2.) Cathetus quicumque dividatur in 5 partes æquales, & radio 4 talium partium describatur circulus. Dico hunc esse æqualem quadrato dato.

DEMONSTRATIO. Quadratum datum est quadratum hypothenusæ $= 50$, quia quadrata 2 Cathetorum 5 partium sunt $= 50$; sed circulus radio 4 partium Catheti descriptus est quoque $= 50$: ergo talis circulus est æqualis quadrato dato.

41. COROLLARIUM. Quoniam Triangula, Polygona & Parallelogramma commutari possunt in quadrata, palam est, etiam circulos describi posse, qui dictis figuris sint æquales.

42. SCHOLION I. Posita diametro $\equiv a$, erit lunula $\equiv \frac{1}{4}aa$; posito porro segmento $\equiv x$, erit area circuli, quippe quæ componitur ex 2 lunulis & ex 2 segmentis, $\equiv \frac{1}{2}aa + 2x$; quæ divisa per $\frac{1}{4}a$, b. e. per 4tam partem diametri, prodit peripheria $\frac{1}{2}a + 2x : \frac{1}{4}a$. Jam cum posita diametro $\equiv 1$, peripheria Ludolphina sit 3, b. e. ejus tripla cum fractione, cujus numerator constat ex 35 notis; palam est, ablatis ex hac periph $\frac{1}{4}a \equiv 2a$, b. e. 2 diametris, relinqui 2 $x : \frac{1}{4}a \equiv 1,1415926535897932384626$ &c. &c.: id quod veritati repugnat: nam lunula terminatur 2 curvis, nempe semiperipheria ADB circuli minoris & 4ta



parte peripheria AEB circuli majoris; nihilominus tamen 2 lunulae cujuslibet circuli divisa per 4tam partem diametri produnt semper tantum fractionem aequalem 2 diametris. Ergo impossibile est, ut 2 segmenta (quorum quolibet terminatur solum una curva, nempe eadem quæ parte periph. AEB circuli majoris, & diametro ACB circuli minoris), divisa per 4tam partem diametri, exhibeant diametrum cum fractione tam monstrata, cujus valor nullatenus exactè determinari potest. Segmenta cujuscunque circuli divisa per 4tam partem diametri manifestant semper unam diametrum cum ejus parte 8va. (§. 33. 37.). Jam verò Archimedes assumtis figuris polygonis, inscripta & circumscripta, utraque 96 laterum, conatus est ostendere, peripheriam continere diametrum minus quàm $3\frac{1}{7}$, & amplius quàm $3\frac{1}{7}$. Est ergo juxta eum ratio diametri ad peripheriam fere ut 1: $3\frac{1}{7}$, de qua Jlluſtris Wolfius in Compendio Elementorum Matheseos (§. 129. Geom.) ait: Quoniam verò hæc ratio in excessu peccat, alii investigarunt accuratorem, b. e. quoniam peripheria, quæ est diametri tripla cum paulo pluribus quàm $\frac{1}{7}$ ejusdem, est juxta major; alii investigarunt peripheriam magis ad veram accedentem. Falluntur igitur, qui asserunt se de veritate limitum ab Archimede pro determinanda peripheria constitutorum esse aequè convictos ac de quavis alia propositione Geometrica, siquidem Mathematicus tam inclutus, qui præclaris ingenii dotibus inter ceteros adeò eminuit, ut tandem ob immortalia in rem literariam merita non potuit persuaderi. S. R. F. fuerit cooptatus, de hac veritate supposita non potuit persuaderi. Latus Dodecagoni per 2 extractionses radicum surdarum, latus Polygoni 24 laterum per 4, latus Polygoni 48 laterum per 6, & latus Polygoni 96 laterum per 8 extractionses radicum surdarum investigatur: unde mirum non est; quòd nullum horum laterum, consequenter nec peripheria exactè determinari possit. Ipsimet Defensores rationis tam Ludolphinæ, quàm Archimedæ, qui præjudiciis non laborant, ingenuè fatentur, ambas esse tantum prope veras; non autem veras: proinde supervacaneum foret, iis examinandis diutius immorari. Calculus integralis, à Viris summis Leibnitio & Newtonio inventus, est quidem ingeniosissimus; sed quòd ejus

ejus usus in rectificandis curvis, sit tantus, quantus prædicatur, id tum demum credam, cum videro Theoremata mea, præsertim 3^{ium} & 4^{um}, directè & solidè refutata.

43. SCHOLION II. Celeberrimi Auctores Encyclopædiæ ante paucos annos in Helvetia editæ sub titulo: Quadrature du Cercle, ita inquirunt: Mr. Newton a déjà démontré dans le premier livre de ses Principes Mathématiques Sect. VI. Tom. XXVIII, que la Quadrature infinie du Cercle, & en general de toute courbe ovale étoit impossible, c'est à dire, qu'on ne pouvoit trouver une Methode pour quarrer à volonté une portion quelconque de l'aire du Cercle; mais il n'est pas encore prouvé, qu'on ne puisse avoir la quadrature absolue du Cercle entier - - - . Quoniam igitur Viri tanti supra laudem meam positi, quippe qui sunt Luminaria Magna Reipublicæ literariæ, scriptis tot Mathematicorum aliis insignium contra perfectam Quadraturam circuli editis de ejus impossibilitate non potuerunt convinci; frustra gloriatur hic quidam Geometra, se eam posse probare per unicum Dodecagonum circulo inscriptum. Si ille mentem affectibus non habet penitus præpeditam, reor ipsum aliter esse sensurum, ritè perpensis hisce propositionibus, quæ quidem sunt eadem, quas jam à septem annis suscepi tuendas; sed nova methodo & tanta evidentia tantoque rigore demonstrandi nunc concinnata, ut non solum sperare, verùm etiam confidere queam, Viros Mathematicum peritos illis assensum suum non esse denegaturos. Cæterùm sit Amicus tam Archimedes, quàm Ludolphus & Metius, quos omnes tres grata prosequor memoria: sit tamen magis amica VERITAS, quæ ab omnibus ambagibus tenebrisque, mihi antehac objectis, in hocce opusculo reperitur remota, & luce meridiana clariùs demonstrata. Interim in gratiam eorum, qui magis praxi, quàm Theoria delectantur, lubet adhuc unum problema adjicere. Sit itaque

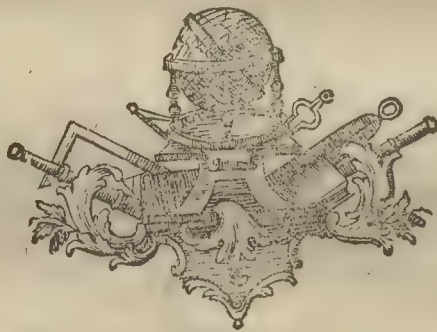
P R O B L E M A VII.

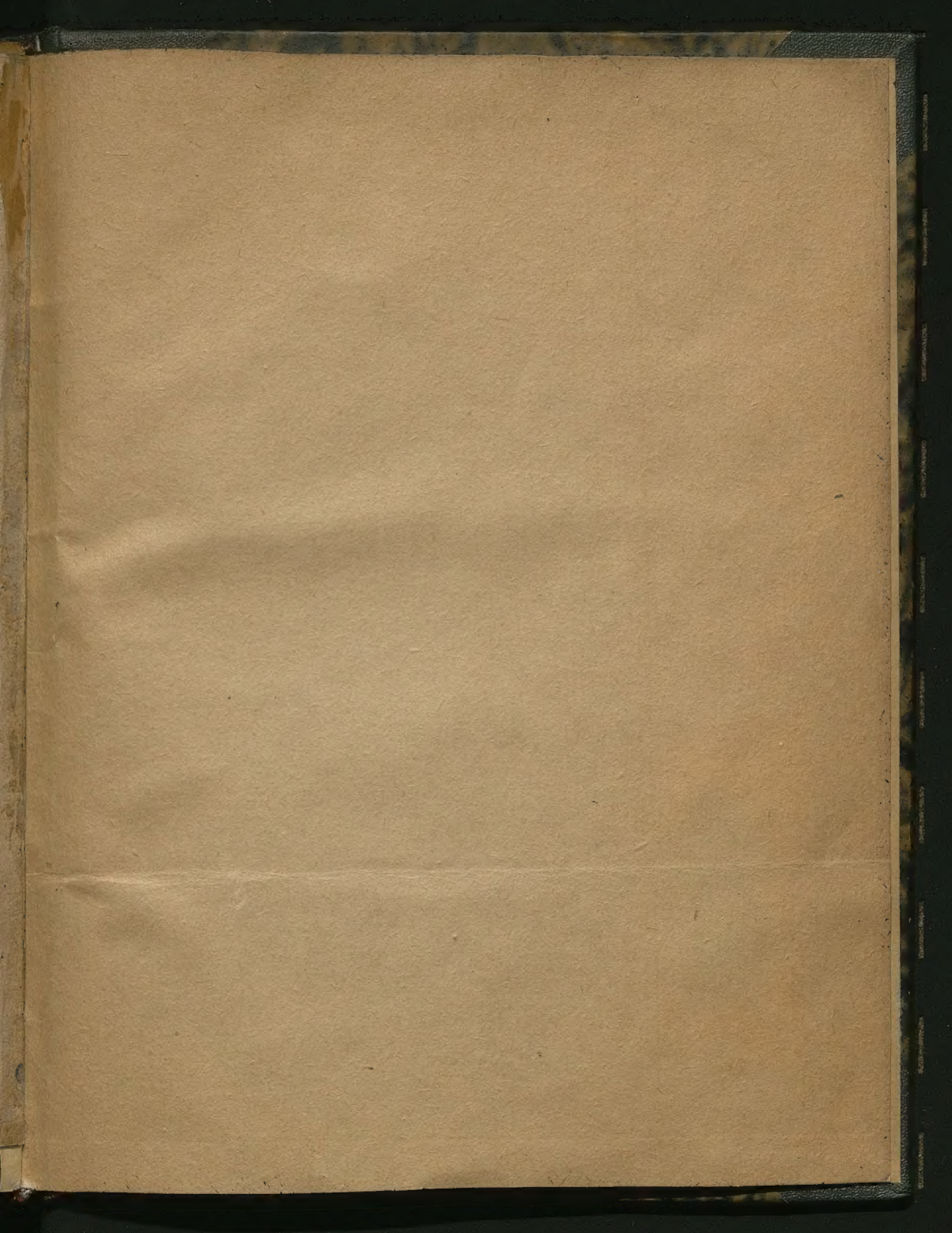
44. Rationem diametri ad peripheriam = 8 : 25 experimento comprobare.

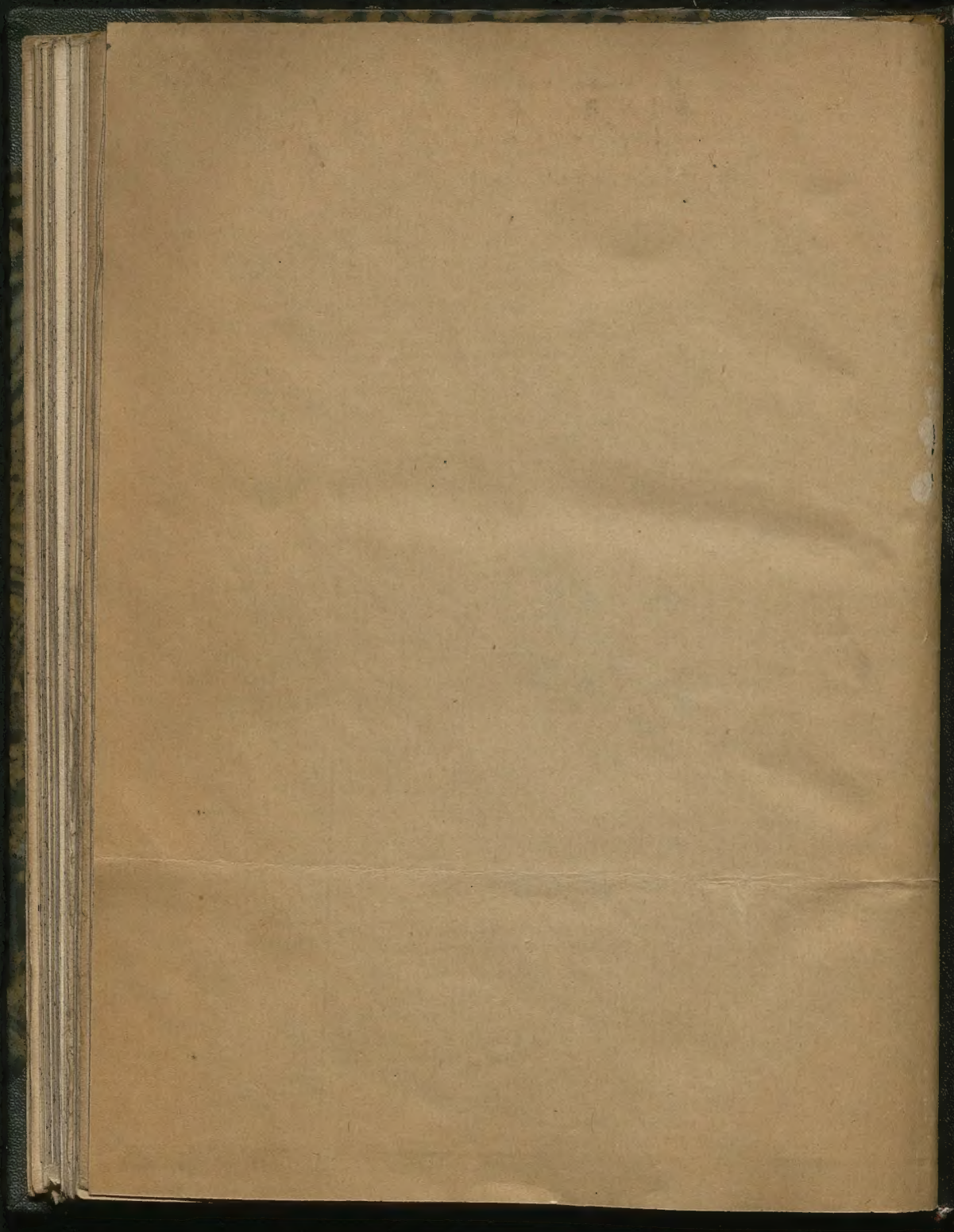
RESOLUTIO & DEMONSTRATIO. 1.) Ope funiculi fungentis vice radii, & 4 ulnarum longi describatur in pavimento plano arcus, eique applicetur chorda æqualis radio, quæ, cum sit latus Hexagoni, determinat sextantem peripheriæ. 2.) Ad hanc chordam ducatur à centro perpendicularis, quæ prolongata dividit sextantem in 2 semisextantes, quorum quilibet est pars 12^{ma} peripheriæ. 3.) A semisextante resecetur pars æqualis digito, quæ, ut regulâ ad eam applicatâ apparebit, erit omnino linea recta. 4.) Intervallum hujus lineæ designetur quinques in semisextante, ita determinatur ejus 10^{ma} pars; quod inde liquet, quia arcus 5'', ut mensuranti patebit, præcisè decies continetur in hoc semisextante, qui proinde est = 50'': unde sextans est = 100'', & peripheria integra = 600 digitis, qui divisi per

24 dant 25 ulnas. Est igitur peripheria circuli, cujus diameter 8 ulnarum, \equiv 25 ulnis. Jam cum eadem peripheria, per rationem Ludolphinam 100 : 314 inventa, sit 25 ulnarum $\mp \frac{3}{25}$; manifestum est, eam peccare in excessu $\frac{3}{25}$ ulnæ, h. e. 3 digitis quàm proximè. Ut experimentum rectè instituitur, consulenda sunt Elementa Geom. Wolffii (§. 132. 210. 212.)

45. SCHOLION. Utendum est radio 4 ulnarum, seu 96" in mensura majori, ut excessus peripheriæ tam Archimedæ, quàm Ludolphinæ evidat eò palpabilior. Siquis verò maluerit hujusmodi delineationem in Charta perficere, necesse est, describere arcum radio 96 pedum è scala geometrica desumptorum, & reliqua peragere, ut in Problemate præcedente fuit dictum, ita patebit totam partem senisextantis, h. e. totam partem peripheriæ esse $\equiv 5'$, consequenter peripheriam integram $\equiv 120 \times 5 \equiv 600$ pedibus: unde diameter est ad peripheriam ut 192 : 600, h. e. dividendo utrinque per 24, ut 8 : 25.







Biblioteka Jagiellońska



stdr0026012

Introlig: K. Wójcika
Zwierzyniecka 10

